# 1 Principes généraux

## 1.1 Introduction

→ Symétrie de jauge : paramétrisée par des fonctions arbitraires de l'espace et du temps.

⊙ Example : éléctromagnétisme :

→ Champ de Maxwell $A_\mu$ et action de Maxwell libre
$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\, d^n x \quad \text{où } F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
est le tenseur de Faraday

→ Propriété de $S[A_\mu]$ : sous $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ avec $\Lambda = \Lambda(x^0, \vec{x})$, le tenseur $F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ donc $S[A_\mu] \mapsto S[A'_\mu] = S[A_\mu]$
Géométriquement, $A_\mu$ est une connexion abélienne

⊙ Exemple : Yang-Mills :

→ Champ de jauge (connexion non abélienne) $A^a_\mu$ où $a \in$ algèbre de Lie générée par $T^a$, avec
$$[T^a, T^b] = f^c{}_{ab}\, T_c$$
Le champ de jauge se transforme comme
$$A^a_\mu \to A'^a_\mu = A^a_\mu + \delta_\varepsilon A^a_\mu$$
avec $\delta_\varepsilon = \partial_\mu \varepsilon^a + f^c{}_{ab} A^b{}_\mu \varepsilon^c \equiv D_\mu \varepsilon^a$
et $\varepsilon^a = \varepsilon^a(x^0, \vec{x})$

→ La courbure est donnée par $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu + f^a{}_{bc} A^b{}_\mu A^c{}_\nu$
Elle se transforme comme
$$\delta_\varepsilon F^a{}_{\mu\nu} = f^a{}_{bc} F^b{}_{\mu\nu} \varepsilon^c$$
On note $F_{\mu\nu} = F^a{}_{\mu\nu} T_a$

→ L'action est $S[A^a{}_\mu] = -\frac{1}{4}\int d^n x\, F^a_{\mu\nu} F^{b\,\mu\nu} g_{ab}$
où $g_{ab}$ est la métrique invariante
Alors $\delta_\varepsilon S = 0$

## gravitation :

→ L'action d'Einstein-Hilbert est $S[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G}\int d^n x \, R\sqrt{-g}$

invariante sous difféomorphisme :

$$\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\kappa g_{\lambda\mu,\kappa} + \xi^\kappa{}_{,\lambda} g_{\kappa\mu} + \xi^\alpha{}_{,\mu} g_{\lambda\alpha}$$

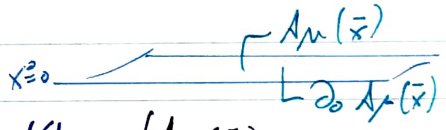
où $\xi^\mu = \xi^\mu(x^0, \vec{x})$

Sous ces transformations :

$\delta(R\sqrt{-g}) = (\xi^\alpha R\sqrt{-g})_{,\alpha}$ terme de surface. Pour $\xi$ qui s'annule au bords, $\delta_\xi S = 0$

→ Tout les modèles d'interactions fondamentales possède des symétries de jauge.

## Problème de Cauchy :




→ Soit une hypersurface $x^0 = 0$ où est définis $\begin{cases} A_\mu(\vec{x}) \\ \partial_0 A_\mu(x) \end{cases}$

Si il existe une invariance de jauge, le problème, posé en terme de variable non-invariante de jauge, est mal posé : la solution n'est pas unique.

DEF Une observable est une quantité invariante de jauge.

→ Pour préserver la localité ($\Rightarrow$ causalité), il faut travailler avec des variables non invariantes de jauge.

ex : $A_\mu$, $A^a_\mu$, $g_{\mu\nu}$

→ Les symétries rigides (ex : Poincaré) n'implique pas de dégénérescences du problème de Cauchy.

⦿ Intégrale de chemin et quantification

→ Pour l'E-M, on écrit $\int \underbrace{[\mathcal{D}A_\mu]}_{\text{se transforme}} e^{\frac{i}{\hbar}\overbrace{S[A_\mu]}^{\text{fixé}}}$

↳ Mal défini à cause de l'invariance de jauge. On fixe alors la jauge (ex : jauge de Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$).

Comment contrôler l'invariance de jauge après avoir fixé la jauge ?
⇒ antichamps

## 1.2 Description des symétries de jauge

→ On note $\phi^i$ les champs $(A_\mu, g_{\mu\nu}, A^a_\mu, \dots)$, et le principe d'action $S_0[\phi^i] = \int d^n x \, \mathcal{L}_0(\phi^i, \partial_\mu \phi^i, \dots, \partial_{\mu_1, \dots, \mu_k} \phi^i)$ (théorie locale)
Les équations d'Euler-Lagrange sont données en calculant

$$\delta S_0 = \int d^n x \, \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i(x)} \delta \phi^i(x) = 0$$
$$= \int d^n x \, \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi^i(x)}(x) \, \delta \phi^i(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \phi^i} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi^i)} - \dots + \dots$$

La dérivée fonctionnelle de l'action par rapport au champ est

$$\frac{\delta S_0}{\delta \phi^i(x)} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_0(x)}{\delta \phi^i(x)}$$

→ On suppose une invariance de jauge locale :

$$\delta_\varepsilon \phi^i = \bar{R}^i{}_\alpha \varepsilon^\alpha + \bar{R}^{i\mu}_\alpha \partial_\mu \varepsilon^\alpha + \dots + \bar{R}_\alpha^{i\mu_1 \dots \mu_s} \partial_{\mu_1 \dots \mu_s} \varepsilon^\alpha$$

avec $\delta_\varepsilon \mathcal{L}_0 = \partial_\mu K^\mu_\varepsilon$ (E-M, YM : $K = 0$ et E-H : $K^\mu = \varepsilon^\mu R\sqrt{-g}$)

⦿ Identités de Noether :

→ $$\delta S_0 = \int d^n x \, \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i(x)} \delta_\varepsilon \phi^i(x) = \int d^n x \left( \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} \bar{R}^i{}_\alpha - \partial_\mu \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} \bar{R}^{i\mu}_\alpha + \dots \right) \varepsilon^\alpha$$

**Thm** Les identités de Noether sont $\frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} \bar{R}^i{}_\alpha - \partial_\mu \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} \bar{R}^{i\mu}_\alpha + \dots = 0$

→ Exemple; E-M:

$$\delta_\varepsilon S_0 = \int d^n x\, \delta_\varepsilon \mathcal{L}_0 = \int d^n x\, \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta A_\mu}\, \overbrace{\delta_\varepsilon A_\mu}^{\partial_\mu \varepsilon}$$

$$= -\int d^n x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A_\mu}\right)\cdot\varepsilon \Rightarrow \partial_\mu\left(\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta A_\mu}\right) = 0$$

En effet, $\underbrace{\partial_\nu\left(\partial_\mu F^{\mu\nu}\right) = 0}_{\text{vrai même si } \partial_\mu F^{\mu\nu} \neq 0 \text{ (off-shell)}}$ (EOM non indépendantes)

DEF On introduit la notation de De Witt pour la transfo. de jauge:

$$\delta_\varepsilon \phi^i = R^i{}_\alpha\, \varepsilon^\alpha$$

↳ L'indice comprend également une variable d'espace-temps, qui est intégrée lorsque l'indice est sommé:

$$\delta_\varepsilon \phi^i \underset{\overset{!!!}{i}}{(x)} = \int d^n x\, R^i{}_\alpha(x,y)\, \varepsilon^\alpha(y) \equiv {}^\alpha$$

↳ Pour une transfo de jauge:

$$R^i{}_\alpha(x,y) = \bar{R}^i{}_\alpha\, \delta(x-y) + \bar{R}^{i\mu}{}_\alpha(x)\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta(x-y)$$

→ Les identités de Noether se recrivent:

$$\delta_\varepsilon S_0 = \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i}\delta\phi^i = \left(\frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} R^i{}_\alpha\right)\varepsilon^\alpha \Rightarrow \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} R^i{}_\alpha = 0$$

## ⊙ Transformations de jauge triviales:

DEF Une transformation de jauge triviale prend la forme

$$\delta_\mu \phi^i = \mu^{ij}\frac{\delta S_0}{\delta \phi^j} \quad \text{avec } \mu^{ij} = -\mu^{ji}$$

Explicitly, $\delta_\mu \phi^i(x) = \int d^n y\, \mu^{ij}(x,y)\, \delta S_0/\delta\phi^j(y)$

→ C'est bien une transfo de jauge:

$$\delta_\mu S_0 = \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i}\delta_\mu \phi^i = \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i}\cdot \mu^{[ij]} \cdot \frac{\delta S_0}{\delta \phi^j} = 0$$

→ Triviale car on shell, $\delta_\mu \phi^i = 0$, et pas d'identité de Noether associée car $\delta_\mu S_0 = 0\ \forall S_0$ → pas d'information sur l'action ou les EOM.

→ Exemple : Klein-Gordon (convention $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, \dots, 1)$)

$$S_0 = -\frac{1}{2}\int d^n x \; \partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi \qquad (\text{EOM} : \Box \phi = 0)$$

→ On choisit $\mu(x,y) = \frac{1}{2}\left(a^\mu(x) + a^\mu(y)\right) \delta_{,\mu}(x,y)$. Alors

$$\delta\phi(x) = \int \frac{1}{2}\left(a^\mu(x) + a^\mu(y)\right) \delta_{,\mu}(x-y) \cdot \Box\phi(y) \; d^n y$$

$\delta_{,\mu}(x-y) \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta(x-y)$

$$= \frac{1}{2} a^\mu(x) \partial_\mu \Box \phi(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \left(a^\mu \Box \phi\right)(x)$$

→ On a bien invariance de l'action :

$$\delta_\mu S_0 = -\int d^n x \left(\delta_\mu \partial_\kappa \phi\right) \partial^\kappa \phi$$

$$= -\int d^n x \; \partial^\kappa \phi \, \partial_\kappa \left(-\frac{1}{2} a^\mu \partial_\mu \Box \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \left(a^\mu \Box \phi\right)\right)$$

$$= +\int d^n x \; \Box\phi \left(\frac{1}{2} a^\mu \partial_\mu \Box \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \left(a^\mu \Box \phi\right)\right)$$

$$= \int d^n x \; \partial_\mu \left(\frac{1}{2} a^\mu (\Box\phi)^2\right) = 0$$ pour $a^\mu$ nul au bords

→ On peut redéfinir les transfo de jauge en reparamétrisant le paramètre de jauge : $\delta_\varepsilon \phi^i = R^i{}_\alpha \varepsilon^\alpha = (R^i{}_\alpha M^\alpha{}_\beta)\eta^\beta$

où $M^\alpha{}_\beta(\phi)$ inversible. Les nouvelles id. de Noether sont alors

$$\frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} R'^i{}_\alpha = \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i} R^i{}_\beta M^\beta{}_\alpha = 0$$ combili des anciennes

On peut aussi ajouter des transformations triviales :

$$\delta_\eta \phi^i = R'^i{}_\alpha \eta^\alpha + \mu^{ij}_\alpha \frac{\delta S_0}{\delta \phi^j} \eta^\alpha$$

DEF | Un ensemble complet de transformation de jauge généré par $\{R^i{}_\alpha\}$ : $\delta_\varepsilon \phi^i = R^i{}_\alpha \varepsilon^\alpha$ est complet si toute transformation de jauge peut s'écrire comme $\delta_\lambda \phi^i = t^i_\lambda$, avec $t^i_\lambda = R^i{}_\alpha \lambda^\alpha + \mu^{ij}_\lambda \frac{\delta S_0}{\delta \phi^j}$

## ⊙ Algèbre des symétries de jauge

→ Soit 2 générateurs $R^i{}_\alpha, R^j{}_\beta$ d'un ensemble complet. Alors :

$$\underbrace{R^j{}_\alpha \frac{\delta R^i{}_\beta}{\delta \phi^j} - R^j{}_\beta \frac{\delta R^i{}_\alpha}{\delta \phi^j} = C^\gamma{}_{\alpha\beta}(\phi) R_\gamma{}^i}_{\text{combili qui dépend des champs}} + \underbrace{M^{ij}_{\alpha\beta}(\phi) \frac{\delta S_0}{\delta \phi^i}}_{\text{trivial}}$$

fonction de structure

→ Dans le cas de E-M, YM et la gravitation,

$$R^j_\alpha \frac{\delta R^i_\beta}{\delta \phi^j} - R^j_\beta \frac{\delta R^i_\alpha}{\delta \phi^j} = C^\gamma{}_{\alpha\beta} R^i_\gamma$$ forme une sous-algebre de Lie.

→ Les transformations de jauge triviales forment un idéal de l'algèbre des transformations de jauge car :

→ $\delta_\varepsilon(\delta_\mu \phi^i) = \delta_\varepsilon(\mu^{ij}\, \delta S/\delta\phi^j) = \delta_\varepsilon \mu^{ij} \cdot \delta S_0/\delta\phi^j$
reste une transfo triviale

→ $[\delta_{\mu_1}, \delta_{\mu_2}]\phi^i = \delta_{\mu_3}\phi^i$

→ Pour une transformation $\delta_\varepsilon \phi^i = R^i_\alpha \varepsilon^\alpha$, $R^i_\alpha$ est dit réductible si les transformation de jauge ne sont pas toutes indépendantes.

ex : pour $B$ une 2-forme, $\delta_\Lambda B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$, mais pour $\Lambda_\mu = \partial_\mu \Phi$, alors $\delta_\Lambda B_{\mu\nu} = 0$

On pourrait avoir $Z^\alpha_\Gamma(\phi)$ tel que $Z^\alpha_\Gamma R^i_\alpha = N^{ij}_\Gamma \frac{\delta S_0}{\delta \phi^j}$.

une combinaison linéaire des transformations de jauge donne une transformation triviale.

DEF | Une algèbre de symétrie de jauge est fermée si il n'y a pas de transformation de jauge triviale.